Les calculs d'intervisibilité par détermination préalable des bassins de visibilité

Société de Calcul Mathématique, S.A.

janvier 1996

1. Description du problème

On dispose d'un terrain carré discrétisé de 100 km x 100 km, découpé en cases carrées de 200 m chacune. Il y a donc 500 cases sur chaque côté et 250 000 cases au total.

Pour la représentation mathématique, les cases vont être supposées centrées sur des points à coordonnées entières (positives ou négatives) dans le plan. On notera $C_{i,j}$ $(i,\ j \in \mathbb{Z})$ la case dont le centre a les coordonnées i, j. On s'intéresse au problème de la visibilité : étant donné deux observateurs A et B situés sur des cases différentes, déterminer s'ils se voient.

Chaque case est affectée d'une altitude, notée $h_{i,j}$. Les observateurs A et B ont donc chacun une altitude ; ils se voient si (et seulement si) aucun obstacle ne vient couper le segment AB.

2. L'approche traditionnelle et ses défauts

Notons N le nombre de cases par côté (ici $N = 200$). L'approche traditionnelle consiste, pour tout couple (A, B), à déterminer les cases que coupe le segment AB, et à comparer l'altitude de ces cases à celle du segment. Si une case coupe le segment, il n'y a pas visibilité, si aucune ne coupe, A et B se voient. Il est bien entendu nécessaire d'explorer *toutes* les cases entre A et B, et ce pour *tous* les couples (A, B) dont on veut connaître l'intervisibilité.

Or, si A et B sont choisis au hasard sur le tableau carré de côté N, le nombre moyen de cases qui les sépare est proportionnel à N (précisément $N/\sqrt{12}$, soit environ $0,3\,N$, voir Annexe 1). Or il y a trois tests à faire :

– déterminer quelles sont exactement les coordonnées des cases qui sont entre A et B,
– déterminer l'altitude du segment AB au-dessus de chacune de ces cases,
– comparer pour chacune de ces cases son altitude propre à celle du segment.

Si P est le nombre d'acteurs, ou "pions" (dans le cas présent, $P = 2\,000$), le nombre de tests à faire sera donc $c \cdot N \cdot P^2$, puisqu'il y a P^2 couples (A, B). Numériquement, nous obtenons (en prenant $c = 0,3$), $2,4 \cdot 10^8$, soit deux cent quarante millions de tests à faire *en ligne* à chaque pas de temps, ce qui est évidemment excessif.

La méthode traditionnelle possède le défaut évident suivant : tous les calculs sont refaits ; on ne se sert jamais d'un résultat déjà obtenu. Par exemple, si on veut déterminer la visibilité de A avec B, puis avec B_1 situé derrière B, tous les calculs de cases entre A et B ont déjà été faits, mais il ne servent à rien, alors qu'il ne reste plus qu'à examiner les cases situées entre B et B_1.

Ces deux raisons (temps excessif et redondance des calculs) font que nous préférons "préparer le terrain" en procédant *au préalable* à certains calculs, que nous allons maintenant décrire.

3. Les bassins de visibilité et les bassins de site

Soit A un pion quelconque sur le terrain. Nous appellerons *bassin de visibilité de* A l'ensemble des cases que voit A. Ceci rend compte de plusieurs phénomènes : les cases qui sont masquées par des reliefs de terrain, la distance maximale de visibilité (qui ne s'étend pas au delà de 30 km, soit 150 cases), et aussi les conditions particulières de visibilité : météorologie qui peut masquer certaines cases (tempêtes de neige ou de sable), conditions urbaines ou lisière de forêt, etc.

Revenons maintenant au terrain proprement dit, en oubliant provisoirement météorologie, zones urbaines, etc. Soit A un pion, et C une case quelconque. Nous appellerons *site de la case* C *vue de* A l'angle minimum (mesuré à partir de l'horizontale) sous lequel sera vu un objet situé AU DESSUS de la case C (voir figure 1).

Ce site peut être positif ou négatif ; il est positif s'il faut lever la tête, négatif si on la baisse. Il ne correspond à l'angle du segment AC avec l'horizontale que s'il n'y a pas d'obstacles entre A et C. Par contre, s'il y a des obstacles, il répond à la question suivante : à quelle altitude minimale dois-je placer un objet au dessus de la case C pour que cet objet soit visible de A, compte-tenu des obstacles.

Le *bassin de sites* de A est l'ensemble des sites mesurés à partir de A, lorsque les cases C décrivent tout le terrain.

Le site est normalement un angle, mais nous l'identifierons à la *tangente* de cet angle. Les angles dont nous parlons étant toujours compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, cette assimilation ne comporte pas d'ambiguité.

Concrètement, le bassin de sites de A est donc un fichier de 300 x 300 (la distance maximale de visibilité) ; à l'intérieur de chaque case de ce fichier on inscrit le site de la case correspondante, vue de A.

Le principe de notre approche est le suivant : tous les bassins de sites sont calculés AVANT la simulation opérationnelle. Pendant la simulation opérationnelle, si l'on désire déterminer l'intervisibilité de A et de B, on procède de la manière suivante :

– on ouvre le bassin de sites de A et l'on y prend le site de la case où se trouve B (par définition, ce site figure dans le bassin). Appelons-le "site théorique".

– on compare le site théorique avec le site réel (si B est simplement posé sur sa case, le site réel est le quotient "altitude de B divisé par distance de A à B", mais B peut parfaitement être un hélicoptère). Si le site réel est supérieur au site théorique, B est vu, sinon il ne l'est pas.

– on interpose tout "masque" que l'on souhaite : conditions météorologiques, zone urbaine ou forestière, etc.

Cette approche possède trois avantages essentiels :

– il n'y a que trois tests à faire en ligne, chacun de ces tests étant immédiat : ouvrir un fichier et en extraire un nombre, comparer ce nombre à un nombre calculé (par quotient de deux données), et finalement interposer éventuellement un masque binaire (oui ou non) tenant compte de contraintes supplémentaires.

– on peut gérer des objets mis au dessus des cases, et non pas simplement posés sur les cases elles-mêmes, à la différence de la méthode traditionnelle. Ceci est très important dans la pratique, notamment à cause de la présence d'hélicoptères.

– les intervisibilités peuvent être dissymétriques : A voit B sans que B voie A (cas des lisières de forêts ou de zones urbaines). Il suffit en effet de rajouter simplement les masques correspondants dans le bassin de A ou dans celui de B. Cette dissymétrie est impossible à obtenir par la méthode traditionnelle.

Dans la pratique, pour un point donné A, nous ne déterminons explicitement que le bassin de sites de A. Nous ne déterminons pas le bassin de visibilité, qui consisterait en un fichier 150 x 150 constitué de "oui" ou de "non", suivant que A voit ou ne voit pas la case correspondante. La raison de ce choix est triple :

– stocker le bassin de visibilité en plus du bassin de sites nécessiterait une importante place mémoire supplémentaire,

– stocker le bassin de visibilité à la place du bassin de sites n'est pas possible, à cause des hélicoptères,

– calculer la visibilité à partir des sites est immédiat et peut être fait en ligne.

4. La détermination récursive des bassins de sites

Pour la description de la méthode, nous mettrons l'observateur en O (altitude $h_{0,0}$). Le calcul est récursif, c'est à dire qu'il se fait en s'éloignant progressivement de l'origine, et en se servant des calculs précédents. Deux méthodes peuvent être envisagées : examiner successivement des cercles concentriques centrés à l'origine, ou examiner des carrés concentriques centrés à l'origine (voir figure 2).

La méthode des cercles concentriques paraît naturelle, dans la mesure où le regard s'oriente de manière identique dans toutes les directions. Mais il faut découper chaque anneau (situé entre deux cercles consécutifs) en domaines de plus en plus petits, et ces domaines ne coincident jamais exactement avec les cases (qui sont carrées) et qui sont prédéfinies. Il en résulte une erreur d'approximation importante, et des calculs compliqués pour savoir quel domaine contient telle case. Pour limiter les erreurs d'approximation, il est nécessaire d'avoir un découpage en domaines très fin, et de ce fait les domaines à considérer doivent être très nombreux, nettement plus que les cases. La méthode des cercles concentriques est examinée en détail à l'annexe 2 ; disons pour simplifier qu'elle n'est acceptable que si l'on admet une erreur d'approximation importante des cases par les arcs de cercle.

Nous avons donc préféré la méthode par propagation de carrés, que nous appellerons "propagation de lignes de crête". Nous allons maintenant la décrire.

5. La propagation de lignes de crête

L'observateur est en O. Les cases sont centrées sur des points à coordonnées entières, et sont de largeur 1. Nous allons déterminer le bassin de sites, vu de O, pour un quart du domaine : la partie $x > 0$ et $|y| \leq x$. Les autres quarts sont obtenus par rotation. Comme la partie inférieure du domaine est identique à la partie supérieure, il suffit de se limiter à celle-ci, à ceci près que les restrictions "$y \geq 0$" sont en réalité "$y \geq -x$".

En tant qu'obstacle, chaque case sera assimilée à un écran mince, s'étendant verticalement, situé au centre de la case et sur toute la largeur de la case : voir figure ci-dessous.

L'ensemble des sites des cases situées à l'abscisse n s'appellera la *ligne de crête* d'abscisse n. Elle sera notée LC_n. Les lignes de crête vont être déterminées récursivement par abscisses croissantes (le calcul de LC_n utilise celui de LC_{n-1}). Pour chaque n, la ligne de crête sera calculée par ordonnées croissantes : le carré est parcouru dans le sens trigonométrique : voir figure ci-dessous.

a. Calcul de LC_1

La ligne de crête LC_1 est située sur la verticale $x = 1$; comme expliqué plus haut, elle s'étend de $y = -1$ à $y = 1$. Nous ne la construisons que pour $y \geq 0$.

* De $y = 0$ à $y = 1/2$, je suis sur la case $C_{1,0}$. Cette case est située à distance 1 de 0 (par convention, la distance entre une case et un point est la distance entre le centre de cette case et ce point, soit $\sqrt{i^2 + j^2}$). Elle a pour hauteur $h_{1,0}$. Le site de cette case est donc

$$s_{1,0} = \frac{h_{1,0} - h_{0,0}}{1} .$$

Rappelons que pour nous le site est la tangente de l'angle défini à la figure 1, et non l'angle lui-même.

* De $y = 1/2$ à $y = 1$, je suis sur la case $C_{1,1}$. Cette case est située à distance $\sqrt{2}$ de 0. Elle a pour hauteur $h_{1,1}$, et donc pour site

$$s_{1,1} = \frac{h_{1,1} - h_{0,0}}{\sqrt{2}} .$$

Avant de donner le calcul général de la ligne de crête LC_n, nous allons analyser en détail celui de LC_2.

b. Calcul de LC_2

La ligne de crête LC_2 est située sur la verticale $x = 2$. Nous la calculons entre $y = 0$ et $y = 2$. Ce calcul est fait en trois étapes.

a) Déterminer le masque de LC_2 dû à la présence de LC_1. Nous appellerons ce masque "ombre portée par LC_1 sur LC_2" (cette terminologie évoque la présence d'une source lumineuse en l'origine, à la place de l'observateur). Cette ombre portée se calcule très simplement : les segments constitutifs de LC_1 se reportent sur LC_2, avec homothétie convenable (ici de rapport 2), et les angles sont les mêmes sur chaque segment. Nous obtenons :

* de $y = 0$ à $y = 1$, le site de l'ombre portée vaut $s_{1,0}$,
* de $y = 1$ à $y = 2$, le site de l'ombre portée vaut $s_{1,1}$.

b) Déterminer l'angle sous lequel on voit les sommets des cases $C_{2,j}$, $j = 0, 1, 2$, sans tenir compte des cases antérieures (en faisant comme si elles n'existaient pas). Cet angle s'appellera *site propre* de ces cases, et sera noté $sp_{i,j}$. Dans le cas présent ($i = 2$), nous avons :

* de $y = 0$ à $y = 1/2$, case $C_{2,0}$, site propre $sp_{2,0} = \dfrac{h_{2,0} - h_{0,0}}{2}$
* de $y = 1/2$ à $y = 3/2$, case $C_{2,1}$, site propre $sp_{2,1} = \dfrac{h_{2,1} - h_{0,0}}{\sqrt{5}}$
* de $y = 3/2$ à $y = 2$, case $C_{2,2}$, site propre $sp_{2,2} = \dfrac{h_{2,2} - h_{0,0}}{\sqrt{8}}$.

c) Sur chaque segment de la verticale $x = 2$, comparer l'ombre portée et le site propre : le site réel est le plus grand des deux. Nous obtenons donc :

* de $y = 0$ à $y = 1/2$, $s_{2,0} = \max\{s_{1,0}, sp_{2,0}\}$
* de $y = 1/2$ à $y = 1$, $s_{2,1} = \max\{s_{1,0}, sp_{2,1}\}$
* de $y = 1$ à $y = 3/2$, $s_{2,2} = \max\{s_{1,1}, sp_{2,1}\}$
* de $y = 3/2$ à $y = 2$, $s_{2,3} = \max\{s_{1,1}, sp_{2,2}\}$.

Il faut noter que maintenant la numérotation $s_{2,l}$, $l = 0, 1, 2, 3$, ne correspond plus à la numérotation des cases, mais au découpage de la ligne de crête. Le nombre de points constitutifs de LC_n sera noté ν_n. Ce découpage peut comporter plus de points qu'il n'y a de cases, car il tient nécessairement compte des reports des découpages précédents. Mais dans la pratique, au contraire, il arrive très souvent que des cases lointaines soient masquées par des cases proches (cf. appendice 3 pour une justification probabiliste de ce phénomène). Pour cette raison, il est inutile de faire apparaître un découpage de la ligne de crête prenant en compte des cases qui sont cachées. De plus, ces points fictifs seraient à leur tour propagés sur les lignes de crête suivantes, et augmenteraient considérablement la complexité des calculs. Il est donc nécessaire de s'assurer que chaque ligne de crête ne contient que les points utiles (un point est inutile si l'altitude est la même de part et d'autre). En particulier sur LC_2, nous ne ferons pas apparaître le point $1/2$ si $s_{1,0} \geq \max\{sp_{2,0}, sp_{2,1}\}$. De même, nous ne ferons pas apparaître le point $3/2$ si $s_{1,1} \geq \max\{sp_{2,1}, sp_{2,2}\}$. Enfin, nous ne ferons pas apparaître le point 1 si $sp_{2,1} \geq \max\{s_{1,0}, s_{1,1}\}$, comme c'est le cas à la figure 6. Dans le premier cas, cela signifie que la case $C_{2,0}$ n'est pas visible, dans le second, c'est la case $C_{2,2}$ qui ne l'est pas. Dans le troisième, la frontière entre les deux cases $C_{1,0}$ et $C_{1,,1}$ ne l'est plus. Ceci sera décrit de manière précise dans la construction de LC_n.

Construction de la ligne de crête LC_n

Nous supposons que les lignes de crête précédentes, LC_1, ..., LC_{n-1} ont été construites. Soit $y_{n-1,1}, \ldots, y_{n-1,\nu_{n-1}}$ les points constitutifs de LC_{n-1} (les points extrêmes sont $y_{n-1,0} = 0$ et $y_{n-1,\nu_{n-1}+1} = n-1$; ils ne sont pas repris dans l'énumération, car ce sont les mêmes à chaque fois). Le nombre de points peut être de deux au minimum (si LC_1 est fait de deux cases de même hauteur, qui ont caché toutes les suivantes) et de $3+4+\cdots+n-1 = n(n-1)/2-3$ si chaque crête est partiellement visible au dessus des précédentes.

Comme expliqué précédemment, la ligne de crête LC_n est construite en trois étapes :

a) Déterminer l'ombre portée par LC_{n-1} sur LC_n. Ceci est fait très simplement : les points $y_{n-1,l}$ ci-dessus se transforment par homothétie de rapport $n/(n-1)$ en en des points notés $y'_{n,l}$:

$$y'_{n,l} \;=\; \frac{n}{n-1}\, y_{n-1,l}\ , \qquad l = 0, \ldots, \nu_{n-1}.$$

Les sites représentant les ombres portées sont identiques, de LC_{n-1} à LC_n. Ceci est expliqué sur la figure suivante : dans le premier cas, LC_n est caché, dans le second, LC_n est apparent.

Reporter l'ombre portée par une case sur la suivante est une simple construction géométrique : on ne se soucie pas de la hauteur réelle de LC_n. Celle-ci est prise en compte à l'étape suivante :

b) Déterminer les sites propres correspondant aux cases $C_{n,j}$, $j = 0, \ldots, n$ en ignorant les cases précédentes. Le calcul est immédiat :

* de $y=0$ à $y=1/2$, $sp_{n,0} = \dfrac{h_{n,0}-h_{0,0}}{n}$,
* de $y=1/2$ à $y=3/2$, $sp_{n,1} = \dfrac{h_{n,1}-h_{0,0}}{\sqrt{n^2+1}}$,
* de $y=m-1/2$ à $y=m+1/2$, $sp_{n,m} = \dfrac{h_{n,m}-h_{0,0}}{\sqrt{n^2+m^2}}$, $1 \leq m < n$,
* de $y=n-1/2$ à $y=n$, $sp_{n,n} = \dfrac{h_{n,n}-h_{0,0}}{\sqrt{n^2+n^2}}$.

c) prendre le maximum des deux quantités et supprimer les divisions inutiles.

Nous donnons maintenant l'algorithme correspondant. La construction est faite par ordonnées croissantes.

Entre deux points consécutifs, $y'_{n,l-1}$ et $y'_{n,l}$ $(l = 1, \ldots, \nu_{n-1})$, nous avons un site, qui est celui calculé pour LC_{n-1}, à savoir $s_{n-1,l}$.

Nous avons par ailleurs le découpage propre des cases $C_{n,m}$: il est simplement constitué des points $1/2$, $3/2$, ..., $n-1/2$. Nous notons $y''_{n,m}$ le point $m-1/2$, pour $m = 1, \ldots, n$.

Il faut d'abord placer les y' parmi les y''. Un point y' est entre $m-1/2$ et $m+1/2$ si et seulement si m est la partie entière de $y'+1/2$. On a donc l'algorithme suivant :

Algorithme de construction de LC_n

- Pour chaque l, $l = 1, \ldots, \nu_{n-1}$, déterminer $m_l = [y'_{n,l} + 1/2]$ (comme d'habitude, le symbole $[x]$ désigne la partie entière de x).

- Si $m_l = m_{l-1}$ (ce qui signifie que les points $y'_{n,l-1}$ et $y'_{n,l}$ appartiennent à la même case), remplacer $s_{n-1,l}$ par $\max\{s_{n-1,l}, sp_{n,m_l}\}$.

- Si $m_{l-1} \neq m_l$ (ce qui signifie que les points $y'_{n,l-1}$ et $y'_{n,l}$ n'appartiennent pas à la même case), intercaler y''_{n,m_l} entre les points $y'_{n,l-1}$ et $y'_{n,l}$. Entre $y'_{n,l-1}$ et y''_{n,m_l}, nous prenons pour site

$$\max\{s_{n-1,l}, sp_{n,m_{l-1}}\}$$

Entre y''_{n,m_l} et $y'_{n,l}$, nous prenons pour site $\max\{s_{n-1,l}, sp_{n,m_l}\}$.

- les points inutiles sont éliminés (rappelons qu'un point de la subdivision est inutile si le site est le même de part et d'autre) ; les points sont renumérotés. Soit ν_n le nombre de points utiles, et soient $y_{n,l}$, $l = 1, \ldots, \nu_n$ ces points. Le site entre deux points consécutifs $y_{n,l-1}$ et $y_{n,l}$ $(l = 1, \ldots, \nu_n)$, est noté $s_{n,l}$.

Notons qu'il est très possible (et même fréquent, à grande distance), qu'il n'y ait aucun point $y_{n,l}$ à l'intérieur d'une case $C_{n,m}$ donnée. Ceci provient du fait que la case en question est entièrement masquée par une case antérieure, et ce fait est fréquent pour deux raisons

– parce que les cases sont de largeur 1 alors que les "ombres" qu'elles projettent sont de largeur croissante à cause des homothéties,

– parce qu'un objet peu élevé, mais situé à courte distance, peut masquer des objets beaucoup plus élevés, mais situés plus loin.

Pour terminer ce paragraphe, remarquons que la construction de la ligne de crête est faite en toute généralité, sans aucune hypothèse simplificatrice. Une case peut fort bien n'apparaître que sur un tout petit tronçon, parce qu'elle est en partie masquée, à gauche comme à droite, par d'autres cases.

En revanche, pour déterminer la visibilité d'un pion situé sur une case, il va falloir faire des hypothèses : où le pion est-il situé sur la case ? On pourrait par exemple décider qu'une case est visible

– si elle est tout entière visible,

– ou bien si elle est visible à plus de la moitié.

Nous prendrons une définition plus large : une case est visible si son centre est visible (si étroit que soit le créneau visible qui le contient). Ceci part d'un point de vue "sécuritaire" : il vaut mieux considérer comme visibles des cases qui le sont à peine, que les ignorer. Mais ce choix est aisément modifiable dans les algorithmes. Imposer des critères de visibilité plus stricts viendrait à réduire le nombre des cases visibles, et de ce fait simplifierait les résultats.

6. Construction du bassin de sites

Une fois calculée la ligne de crête LC_n comme nous venons d'expliquer, on place les points entiers $m = 0, 1, \ldots, n$ parmi les points $y_{n,l}$, $l = 0, \ldots, \nu_n$. Le site de la case $C_{n,m}$ sera le site correspondant au segment qui contient l'entier m.

Les sites des cases $C_{n,m}$, $m = 0, 1, \ldots, n$, sont stockés dans le fichier des sites vus de l'origine (le bassin de sites de O). La ligne de crête LC_n est propagée pour construire LC_{n+1}, puis est effacée (les lignes de crête ne servent qu'à construire les bassins de site ; elles ne sont pas conservées).

7. Construction du bassin de site à grande distance

Comme nous l'avons déjà dit, et comme il est expliqué en détail à l'annexe 1, les cases situées à grande distance seront rarement vues : la probabilité est forte qu'elles soient masquées par des cases antérieures. Il est donc utile de faire figurer dans l'algorithme un moyen de tester rapidement plusieurs cases d'un coup, pour les éliminer ensemble si elles ne sont pas visibles. Si au contraire l'une d'elles l'est, l'algorithme “redescendra” au niveau des cases individuelles, et reprendra la procédure décrite au paragraphe précédent.

Il ne s'agit pas, notons-le bien, d'une procédure de “fusion” des cases à grande distance. Il serait probablement légitime, à distance suffisante, de fusionner les cases par quatre, voire par seize (en remplaçant l'altitude de chacune par la moyenne des altitudes), mais ceci modifierait les données du problème et nous n'avons pas voulu le faire.

Avant toute chose, on construit un tableau de cases où les cases ont été groupées par carrés de trois sur trois. Chaque grosse case (bloc de neuf) est affectée d'une altitude qui est le maximum des altitudes des neuf cases qui le constituent.

Après quoi on réitère l'opération en construisant un tableau de “très grosses cases”, en groupant les précédentes par neuf (et donc les cases d'origine par 81) ; chaque très grosse case est affectée de l'altitude maximale des grosses cases la composant.

Ces deux tableaux sont réalisés à partir du tableau d'origine ; c'est un “prétraitement” qui sera utilisé pour tous les bassins de site, quel que soit l'observateur.

Revenons maintenant à la construction d'un bassin de site, par exemple celui de O. Pour $n \geq 30$ (dix fois la largeur d'une grosse case), soit n_0 le premier indice où l'on rencontre la frontière d'une grosse case (ces grosses cases se rencontrent toutes les trois cases, cela peut donc être à 30, à 31 ou à 32). Supposons construite la ligne de crête LC_{n_0-1} comme indiqué précédemment. Soient $y'_{n_0,l}$ les points de LC_{n_0-1} reportés sur $x = n_0$. Considérons une grosse case, notée GC_j. Soit $y'_{n_0,l'}$ le dernier point au dessous de la grosse case, et $y'_{n_0,l''}$ le premier point au dessus.

Nous allons construire d'un coup trois lignes de crête, en procédant comme suit :

Soit $y'_{n_0,l-1}$ $y'_{n_0,l}$ un intervalle entre $y'_{n_0,l'}$ et $y'_{n_0,l''}$.

– Si le site entre ces deux points est supérieur au site propre de la grosse case, cela veut dire que la grosse case est invisible, à cet endroit, donc a fortiori les cases qui la composent. On reporte les points $y'_{n_0,l}$ sur $x = n_0 + 1$ et sur $x = n_0 + 2$. On détermine les sites aux points à coordonnées entières des trois segments $x = n_0$, $x = n_0 + 1$, $x = n_0 + 2$, et on inscrit ces sites dans le fichier des bassins de site. On passe à la grosse case suivante (située au dessus). On économise ainsi, par rapport à la procédure standard, le calcul des maximums dans chaque segment et l'élimination des points inutiles. Le découpage de LC_{n_0-1} a simplement été reporté sur les suivants.

– Si au contraire le site sur cet intervalle est inférieur au site propre de la grosse case, cela signifie que l'une des neuf cases constitutives risque d'être vue (cela n'est pas certain, car le procédé choisi – prendre comme altitude unique le maximum des altitudes constitutives– revient à ramener sur le devant des cases plus hautes, mais qui peuvent être situées à l'arrière du carré de neuf). Il est donc nécessaire d'examiner les cases une à une. Sur l'intervalle $y'_{n_0,l-1}$ $y'_{n_0,l}$, on introduit si nécessaire le point de découpage $m-1/2$, on remplace les sites par le maximum du précédent et du site propre et on fabrique le bassin de site, successivement pour n_0, $n_0 + 1$ et $n_0 + 2$, le tout en restant toujours dans le pinceau considéré. L'idée est ici qu'il faut avoir fini l'exploration de chaque grosse case avant de passer à la suivante.

8. Construction des bassins de site à très grande distance

A partir de $n = 90$ (dix fois la largeur des très grosses cases), on examinera d'un coup les tableaux de 9x9 cases, car il est probable que ces tableaux seront en général globalement masqués. Si une très grosse case n'est pas vue, les lignes de crête sont simplement reportées, si elle est vue, on descend au niveau des grosses cases, chacune des neuf étant explorée à son tour.

9. Bassins de sites à courte, moyenne, et longue portée.

Nous venons de voir la construction d'un bassin de sites complet : la ligne de crête s'étend jusqu'à la distance maximale de visibilité (30km, soit 150 cases) et elle tient compte de l'ensemble des découpages de cases, même à grande distance : le processus d'*accélération* décrit plus haut pour éliminer des cases invisibles n'affecte en rien la précision lorsque ces cases sont visibles.

Mais dans la pratique, il n'est en général pas utile de construire tous les bassins de visibilité avec une portée aussi grande. Si on le fait, il est nécessaire de construire un bassin par case du tableau, soit 250 000 fichiers complets. D'une part, ceci exige une place mémoire considérable, d'autre part, l'information recueillie est souvent redondante, la vision que l'on peut avoir à distance de 30km est en général la même, si l'on se déplace de 200m.

Par conséquent, nous allons nous organiser comme suit : chaque case du tableau d'origine a visibilité réduite : seulement jusqu'à $n = 30$ (6km). Chaque groupe de neuf cases (les grosses cases) a en son centre un guetteur, qui, lui, a visibilité moyenne : jusqu'à $n = 50$ (10km). Chaque groupe de neuf grosses cases (chaque très grosse case) a en son centre un guetteur principal, qui a visibilité jusqu'à $n = 150$ (30km).

G = guetteur, GP = guetteur principal.

Concrètement, pour avoir des calculs exacts, on prendra un tableau de 99 km $\times$ 99 km $= 495 \times 495$ cases, groupées en 55×55 tableaux de 9×9 cases, d'où 3025 très grosses cases.

L'agencement est donc le suivant :

– chaque case, au sein de la très grosse case, a son propre bassin de visibilité, qui s'étend jusqu'à $n = 30$.

– Si elle désire savoir ce qui se passe entre $n = 31$ et $n = 50$, elle interroge le guetteur situé au centre de la grosse case à laquelle elle appartient. Ce guetteur est nécessairement situé : soit sur la case elle-même, soit sur la case voisine. Le centre de cette case est à distance au plus $\sqrt{2} \times 200$ m ~ 280 m, tandis que la visée doit s'exercer à plus de $31 \times 200 = 6,2$km. Le rapport entre les deux : $\frac{280}{6200} \sim 0,045$ est très inférieur à l'incertitude d'appréciation quant à la position sur une case proche : si je suis en 0 et que j'observe quelqu'un situé sur la case $C_{2,0}$, la position de cette personne peut être comprise entre $1,5$ et $2,5$, d'où une erreur relative de $\frac{2,5-1,5}{2} = 0,5$. Quant à l'erreur angulaire, elle est elle aussi très importante : la case $C_{2,2}$ est vue de 0 sous un angle de $28°$.

– si maintenant elle désire savoir se qui se passe au loin : entre $n = 51$ et $n = 150$, elle interroge le guetteur principal, situé au centre de la très grosse case. Celui-ci est situé au plus à 4 cases en diagonale de centre à centre donc à distance $\sqrt{2} \times 4 \times 200 = 1130$m, tandis que la visée doit s'exercer à plus de $51 \times 200 = 10\ 200$m, d'où un rapport de $0,11$.

Le nombre de guetteurs principaux est égal au nombre de grosses cases, soit 3025, ce qui donne autant de bassins de visibilité complets.

Le nombre de guetteurs (non principaux) est de 8 par très grosse case, soit 24 200, et autant de bassins de visibilité moyens.

Le nombre de bassins de visibilité réduits est égal au nombre de cases qui ne sont ni guetteurs, ni guetteurs principaux, soit $495^2 - 9 \times 3025 = 217800$.

9. L'implémentation informatique.

Le langage utilisé est le "C", sur une Sparc Station 20, de SUN. Les processeurs étant 32 bits, les entiers longs et les réels flottants sont codés sur 4 octets. Pour économiser de la place mémoire, on utilise des entiers court ("short"), qui s'étendent de -32 000 à 32 000. Ce qu'on conserve, c'est pour la tangente de chaque angle, la partie entière multipliée par 1000. Chaque adresse mémoire est codée sur 4 octets.

On stocke chaque ligne de crête après simplification (pour éliminer les points inutiles) et conversion en points entiers (ce sont les centres des cases qui nous importent). Ainsi, lorsqu'on désire savoir si A voit un objet au-dessus de la case B, on ouvre le fichier correspondant à A, on recherche la ligne contenant B, on place B entre les points entiers qui se trouvent sur cette ligne, et on compare le site de l'objet au site calculé pour la case B. Un exemple numérique est donné ci-dessous.

Cette façon de stocker les donées permet d'éliminer les redondances ; elle s'apparente à une compression de données.

Chaque case du terrain donne naissance à un pointeur, qui accède à quatre directions : Nord, Sud, Est, Ouest. Chacune de ces directions donne à son tour naissance à un pointeur, qui indique les lignes de crête, stockées comme expliqué plus haut. Cette façon de procéder permet de créer une arborescence, donc des fichiers plus petits, et garantit un temps d'accès plus court.

Toutes les lignes de crête sont représentées par des listes chaînées. Il s'agit d'un ensemble de structures de données constitué de trois espaces-mémoire. Ceux-ci contiennent respectivement la donnée d'un site, la donnée du début de l'intervalle où s'applique ce site, et enfin un pointeur contenant l'adresse de la structure suivante. C'est ce pointeur qui permet de chaîner les structures entre elles. Cette façon de structurer les données a l'avantage d'optimiser l'espace-mémoire nécessaire au stockage. En effet, si plusieurs intervalles ont le même site, ceux-ci seront fusionnés, comme on le voit sur l'exemple suivant :

Pour construire les lignes de crête successives, il faut dans un premier temps reporter l'ombre de la ligne précédente. Cela se réalise très simplement en appliquant un coefficient multiplicateur à la donnée du début d'intervalle. Dans un deuxième temps, on contruit la ligne de crête propre à l'abscisse désirée, en fusionnant tout de suite les intervalles adjacents ayant même site. Puis nous fusionnons cette ligne de crête propre avec l'"ombre portée" par la ligne précédente. Il suffit maintenant de simplifier cette nouvelle ligne de crête, en éliminant les points inutiles.

Annexe 1

Le nombre de calculs à faire pour déterminer la visibilité entre A et B, par la méthode traditionnelle, est en moyenne de $N/\sqrt{12}$, si N est la longueur d'un côté du terrain carré où se trouvent A et B.

Cela résulte de l'énoncé suivant :

Proposition. – *Soient A et B des variables suivant une loi uniforme sur un tableau carré $N \times N$. Alors*

$$E\ (\text{dist}\ (A,B))^2\ \sim\ \frac{N^2}{12}.$$

Démonstration.

Soient X, Y les coordonnées de A, X', Y' celles de B. Les quatre variables X, Y, X', Y' sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur $[-N/2, N/2]$. Donc :

$$\begin{aligned} E\,(\text{dist }(A,B))^2 &= E\left((X-X')^2+(Y-Y')^2\right) \\ &= E(X^2+X'^2-2XX'+Y^2+Y'^2-2YY') \\ &= 4EX^2-4E(XX'), \end{aligned}$$

puisque $E(XX') = EX.EX' = 0$.

Or, pour $i = 0, \ldots, N/2$,

$$\begin{aligned} P\{X^2=i^2\} &= P\{X=i\}+P\{X=-i\} \\ &= 2/N \end{aligned}$$

et $P\{X^2 = j\} = 0$ si $j < 0$ ou si j n'est pas un carré.

Donc :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=0}^{N/2} i^2\ P\{X^2=i^2\} \ = \ \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N/2} i^2 \\ &\sim \frac{2}{N}\times\frac{1}{3}\,(\frac{N}{2})^3 \ = \ \frac{N^2}{12}, \end{aligned}$$

d'où notre assertion.

Annexe 2

Modèle circulaire pour la propagation des lignes de crête

Les données sont les mêmes que pour l'ensemble du rapport : distance de vision 150 cases, observateur en $(0,0)$.

Au départ, on considère des pinceaux d'angle $2\pi/16 = \pi/8$; il y en a 16, donc 4 par quadrant.

La ligne de crête LC_1 est sur le cercle $\mathcal{C}_1$, cercle de rayon 1. Elle prend en compte les cases dont le centre est intérieur au cercle, à savoir les cases $C_{1,0}$ et $C_{0,1}$. Elle est définie par :

– de 0 à $\pi/8$, $h_{1,0}$ (hauteur de $C_{1,0}$)
– de $\pi/8$ à $2\pi/8$, $h_{1,0}$
– de $2\pi/8$ à $3\pi/8$, $h_{0,1}$ (hauteur de $C_{0,1}$)
– de $3\pi/8$ à $4\pi/8$, $h_{0,1}$.

Une fois que LC_1 est construite, on divise chaque pinceau en 2, à partir du cercle $\mathcal{C}_1$. Les angles des pinceaux sont maintenant $\pi/16$.

La ligne de crête LC_2 est sur le cercle $\mathcal{C}_2$; elle est définie par $LC_2 = \max(LC_2', LC_2'')$, où :

* LC_2' est le report de LC_1 avec homothétie, à savoir :

– de 0 à $\pi/8$: $2h_{1,0}$
– de $\pi/8$ à $2\pi/8$: $2h_{1,0}$
– de $2\pi/8$ à $3\pi/8$: $2h_{0,1}$
– de $3\pi/8$ à $4\pi/8$: $2h_{0,1}$.

* Pour construire LC_2'', on reporte les ombres portées par les cases dont les centres sont situés entre les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, à savoir $C_{2,0}$, $C_{1,1}$, $C_{0,2}$. Le critère retenu sera celui-ci : une case cache le pinceau si cette case intersecte la bissectrice du pinceau. Donc LC_2'' est défini par :

– de 0 à $\pi/16$: $h_{2,0}$
– de $\pi/16$ à $2\pi/16$: $h_{2,0}$
– de $2\pi/16$ à $3\pi/16$: $h_{1,1}$
– de $3\pi/16$ à $4\pi/16$: $h_{1,1}$
– de $4\pi/16$ à $5\pi/16$: $h_{1,1}$
– de $5\pi/16$ à $6\pi/16$: $h_{1,1}$
– de $6\pi/16$ à $7\pi/16$: $h_{0,2}$
– de $7\pi/16$ à $8\pi/16$: $h_{0,2}$.

Pour fabriquer LC_3, il n'y a pas de subdivision des pinceaux. On construit LC_3' par report de LC_2, dans une homothétie de rapport $3/2$, et LC_3'' en tenant compte des cases dont les centres sont entre $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, à savoir $C_{3,0}$, $C_{2,1}$, $C_{2,2}$, $C_{1,2}$, $C_{0,3}$.

Construction de LC_n.

– On a d'abord un report de LC_{n-1} sur LC_n', avec une homothétie de rapport $n/n-1$.

– Eventuellement, on réalise une dichotomie des pinceaux (doublement de leur nombre). La règle est celle-ci : on veut que le nombre de pinceaux utilisés pour découper la couronne entre $n-1$ et n soit au moins le double du nombre de cases rencontrées (entre 0 et 1, 2 cases et 4 pinceaux ; entre 1 et 2, 3 cases et 8 pinceaux ; entre 2 et 3, 5 cases et 16 pinceaux).

En calculant une table de $\nu(n)$, nombre de points à coordonnées entières dans la couronne $\{n-1 < |z| < n\}$, on constate que $\nu(n) \leq 6n$ pour $n \leq 1000$.

On utilisera donc 2^k pinceaux pour les n qui vérifient

$$k-1 \ < \ \frac{\log(6n)}{\log 2}+1 \ \leq \ k,$$

ou $k=[\log_2(6n)+1]$.

La subdivision des pinceaux se fait donc aux n qui sont des changements de valeur de $[\frac{2^{k-2}}{6}]$: à chaque fois que cette quantité augmente de 1, le nombre de pinceaux est multiplié par 2.

Voici la table du nombre de pinceaux, en fonction de la distance à l'origine.

n	nombre de pinceaux
de 0 à 1	2^4
de 1 à 2	2^5
de 2 à 5	2^6
de 5 à 10	2^7
de 10 à 21	2^8
de 21 à 42	2^9
de 42 à 85	2^{10}
de 85 à 150	2^{11}

Remarque importante :

Le nombre total de pinceaux utilisés est donc $2^4\times 1+2^5\times 1+2^6(5-2)+2^7(10-5)+2^8(21-10)+2^9(42-21)+2^{10}(85-42)+2^{11}(150-85)=191\,600$, tandis que le nombre réel de cases est $\pi(150)^2 \sim 70\,686$. Le nombre de pinceaux utilisés est donc finalement très élevé : près du triple du nombre de cases.

– Il faut ensuite déterminer les cases que recoupe chaque pinceau, entre $\mathcal{C}_{n-1}$ et $\mathcal{C}_n$. On considère qu'une case occulte le pinceau si la bissectrice du pinceau coupe la case. On peut avoir au maximum trois cases occultant un pinceau entre $n-1$ et n.

Calcul de LC''_n.

Nous avons 2^k pinceaux, où $[\frac{2^{k-2}}{6}] \leq n < [\frac{2^{k-1}}{6}]$.

Les bissectrices de ces pinceaux correspondent aux angles

$$(2j+1)2\pi/2^{k+1}, \quad j = 0, \ldots, 2^k - 1.$$

On va déterminer les cases que traverse cette bissectrice. Un point $A(x,y)$ appartient à la case $C_{i,j}$ où $i = [x - 1/2] + 1$, $j = [y - 1/2] + 1$.

Soient maintenant A et B les extrémités de la bissectrice du pinceau considéré. On a les cas suivants :

– ou bien A et B appartiennent à la même case, c'est à dire $[x_A - 1/2] = [x_B - 1/2]$ et $[y_A - 1/2] = [y_B - 1/2]$. En ce cas, cette case est la seule à occulter le pinceau et on met sur LC''_n, pour ce pinceau, la hauteur de cette case.

– ou bien A et B appartiennent à des cases différentes. Ceci peut se produire de plusieurs manières :

a) $[y_A - 1/2] = [y_B - 1/2]$, mais $[x_A - 1/2] < [x_B - 1/2]$.

On met alors sur LC''_n le maximum de h_A et de h_B.

b) $[y_A - 1/2] < [y_B - 1/2]$, mais $[x_A - 1/2] = [x_B - 1/2]$.

On met encore sur LC''_n $\max(h_A, h_B)$.

c) cas où $[x_A - 1/2] \neq [x_B - 1/2]$ et $[y_A - 1/2] \neq [y_B - 1/2]$.
Il y a alors une case intermédiaire qui bouche le segment AB, et il faut savoir laquelle c'est :

Considérons la case qui contient A, et le segment AB qui en sort. Soit D le coin de la case

Le centre de la case a pour coordonnées $u = [x_A - 1/2] + 1$, $v = [y_A - 1/2] + 1$, et le point D $(u + 1/2, v + 1/2)$.
La pente de AD est appelée "pente critique", elle vaut $\frac{v+1/2}{u+1/2}$.
Si A est au dessus de la pente critique, c'est à dire si

$$\frac{y_A}{x_A} > \frac{v+1/2}{u+1/2},$$

on sera dans le cas no 1, et la hauteur reportée sur LC''_n sera

$$\max\{h(C_{u,v}), \quad h(C_{u,v+1}), \quad h(C_{u+1,v+1})\}.$$

Si A est au-dessous de la pente critique, c'est à dire si

$$\frac{y_A}{x_A} < \frac{v+1/2}{u+1/2},$$

la hauteur sera

$$\max\{h(C_{u,v}), \quad h(C_{u+1,v}), \quad h(C_{u+1,v+1})\}.$$

Conclusion.

L'approche par propagation de cercles paraît satisfaisante au premier abord, car elle procède d'une symétrie circulaire qui est celle de la vision. Mais on rencontre deux difficultés :

– le nombre de pinceaux à traiter doit être beaucoup plus élevé que le nombre réel de cases, si l'on veut avoir une bonne approximation des cases,

– la détermination des cases intermédiaires susceptibles d'occulter un pinceau est très délicate et fait appel à de nombreux tests, du fait des multiples configurations possibles. Ces tests seront autant de ralentissements de l'algorithme, d'autant que les configurations compliquées (trois cases occultant le pinceau) se rencontrent très fréquemment.

Annexe 3

Limite pratique des bassins de visibilité.

Nous allons montrer ici que, en général, un bassin de visibilité ne s'étend pas très loin : il est rare que l'on puisse voir plus de quatre cases dans une direction donnée. Ceci justifie les algorithmes d'"élimination rapide" de blocs de cases, que nous avons décrits précédemment.

L'observateur est situé en 0, à l'altitude 0 (nous pouvons bien sûr toujours nous ramener à ce cas, par changement de repère). Il observe dans la direction de l'axe des x. Chacune des cases $C_1, \dots, C_n$, est un obstacle de hauteur $H_1, \dots, H_n$, situé à distance $1, \dots, n$ de 0. Les H_i sont des variables indépendantes de même loi ; on note f la densité de cette loi et F la fonction de répartition associée.

Les obstacles sont infiniment minces.

Soit X la variable indiquant le numéro de la dernière case que l'on voit (ligne de crête). On a $1 \leq X \leq n$. Nous allons décrire l'événement $\{X = k\}$.

– $\{X = 1\}$ signifie que $C_2, \dots, C_n$ sont cachés par C_1, c'est à dire :

$$H_2 \ \leq \ 2H_1, \dots, H_n \ \leq \ nH_1,$$

– $\{X = k\}$ signifie que C_k n'est pas caché par $C_1, \dots, C_{k-1}$, mais cache $C_{k+1}, \dots, C_n$. Ceci se traduit par :

$$\frac{H_k}{k} \ \geq \ \frac{H_j}{j}, \qquad \forall j \neq k \tag{1}$$

Remarquons que les v.a. $(\frac{1}{j}H_j - \frac{1}{k}H_k)_j$ ne sont pas nécessairement indépendantes (ce n'est pas parce que X_0, X_1, X_2 sont indépendantes que $X_1 - X_0$ et $X_2 - X_0$ le sont).

Pour déterminer la probabilité de (1), nous allons procéder comme suit.

Soit $p_k = P\{X = k\}$. La densité du n-uple $(H_1, \dots, H_n)$ est $f(x_1) \times \cdots \times f(x_1)$. Donc :

$$p_k \ = \ \int \cdots \int_{A_k} f(x_1) \cdots f(x_n) \ dx_1 \cdots dx_n,$$

où

$$A_k \ = \ \{(x_1, \dots, x_n) \ ; \quad \frac{x_j}{j} \ \leq \ \frac{x_k}{k} \qquad \forall j \neq k\}.$$

Ceci s'écrit encore :

$$\begin{aligned} p_k \ &= \ \int f(x_k) \left(\Pi_{j \neq k} \int_{x_j \leq \frac{j}{k} x_k} f(x_j) \ dx_j \right) dx_k \\ &= \ \int f(x_k) \left(\Pi_{j \neq k} \ F(\frac{j}{k} x_k) \right) dx_k \end{aligned} \tag{2}$$

et par changement de variable ceci s'écrit encore :

$$p_k \;=\; k\int f(kx)\,\Pi_{j\neq k}\;F(jx)dx. \tag{3}$$

Comme il s'agit d'un terrain, la hauteur des obstacles est limitée, vers le haut et vers le bas. Choisissant l'unité de manière appropriée, on peut donc supposer que cette hauteur est comprise entre -1 et 1. En d'autres termes : f est à support compact dans $[-1,1]$ et $F=0$ si $x<-1$, $F=1$ si $x>1$.

On va décomposer chaque événement $\{X=k\}$ en deux : $\{X=k \text{ et } H_k\geq 0\}$ et $\{X=k \text{ et } H_k<0\}$, suivant qu'il s'agit d'une bosse ou d'un creux. On note respectivement p_k^+ et p_k^- les probabilités correspondantes.

Pour p_k^-, on a une estimation très simple :

$$p_k^- \;=\; \int_{-1}^{0} f(x)\,\Pi_{j\neq k}\;F(\frac{j}{k}x)dx \;\leq\; (F(0))^n. \tag{4}$$

On fait l'hypothèse raisonnable que $F(0)=1/2$: il y a autant de creux que de bosses ou, si l'on préfère, 0 est l'altitude moyenne. Alors (4) donne $p_k^- \leq 1/2^n\ \ \forall k$, et les p_k^- contribuent peu au calcul. Ceci est intuitif : si le regard butte sur C_k comme ligne de crête, c'est en général lorsque C_k est en hauteur, et non en creux.

Nous allons maintenant nous intéresser aux p_k^+, qui peuvent s'écrire :

$$p_k^+ \;=\; \int_0^1 f(x)\,\Pi_{j\neq k}\;F(\frac{j}{k}x)dx.$$

Il est évident que $p_k^+ < p_{k-1}^+$, puisque

$$\Pi_{j\neq k}\;F(\frac{j}{k}x) \;<\; \Pi_{j\neq k-1}\;F(\frac{j}{k-1}x).$$

Par ailleurs, la suite p_k est majorée par une suite à décroissance exponentielle. En effet :

$$p_k \;=\; \int_{-1}^{1} f(x)F(\frac{x}{k})\cdots F(\frac{k-1}{k}x)F(\frac{k+1}{k}x)\cdots F(\frac{nx}{k})dx \;\leq\; F(1/k)\cdots F(\frac{k-1}{k})$$

et la suite $\Pi_k = F(\frac{1}{k})\cdots F(\frac{k-1}{k})$ décroît exponentiellement lorsque $k\to+\infty$.

Nous voyons donc que $EX<+\infty$: la distance de vue reste bornée. Pour préciser ceci, nous allons désormais supposer que les H_k suivent toutes la loi uniforme sur $[-1,1]$, d'où :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \text{ si } x\leq -1\\ &= \frac{1}{2} \text{ si } -1\leq x\leq 1\\ &= 0 \text{ si } x\geq 1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, \quad x\leq -1\\ &= \frac{1}{2}(x+1), \quad -1\leq x\leq 1\\ &= 1, \quad x\geq 1. \end{aligned}$$

a) Calcul de p_1.

On a

$$\begin{aligned} p_1^- &= \int_{-1/n}^{0} \frac{1}{2} F(2x)\cdots F(nx)dx \\ &\leq (F(0))^{n-1}(F(0) - F(-1/n)) \\ &= \frac{1}{n.2^n} \end{aligned} \tag{5}$$

et

$$p_1^+ = \int_0^1 \frac{1}{2} F(2x)F(3x)\cdots F(nx)dx.$$

L'intégrale $\int_0^1$ est découpée en $\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{1/n-1} + \cdots + \int_{1/j+1}^{1/j} + \cdots + \int_{1/3}^{1/2} + \int_{1/2}^{1}$.

Les intégrales respectives sont notées A_n, $A_{n-1}, \ldots, A_j, \ldots, A_2$, A_1.

Le calcul donne

$$A_1 = 1/4, \quad A_2 = 11/144. \tag{6}$$

Pour A_j, $j \geq 3$, on fait simplement une majoration :

$$\begin{aligned} A_j &= \int_{1/j+1}^{1/j} \frac{1}{2} F(2x)\cdots F(jx)dx \\ &= \frac{1}{2^j}\int_{1/j+1}^{1/j} (2x+1)(3x+1)\cdots(jx+1)dx \\ &\leq \frac{1}{2^j}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right)\left(\frac{2}{j}+1\right)\left(\frac{3}{j}+1\right)\cdots\left(\frac{j}{j}+1\right) \\ &= \frac{1}{2^j}\frac{(j+2)(j+3)\cdots(2j)}{(j+1)\, j^j} \\ &= \frac{(2j)!}{(j+1)!}\ \frac{1}{2^j j^j (j+1)} \end{aligned}$$

et par application de la formule de Stirling, on trouve

$$A_j \leq \frac{\sqrt{2}}{j^2}\left(\frac{2}{e}\right)^j, \qquad j = 3, \ldots, n. \tag{7}$$

b) Calcul de $p_2 = \int_{-1}^{1} f(x)F(x/2)F(3x/2)F(4x/2)\cdots F(nx/2)dx$.

On a comme précédemment :

$$\begin{aligned} p_2^- &= \int_{-2/n}^{0} f(x)F(x/2)F(3x/2)\cdots F(nx/2) \\ &\leq (F(0))^{n-1}(F(0) - F(-2/n)) \\ &= \frac{1}{n.2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Pour la partie p_2^+, on décompose l'intégrale en

$$\int_0^{2/n} + \int_{2/n}^{2/n-1} + \cdots + \int_{2/j+1}^{2/j} + \cdots + \int_{2/4}^{2/3} + \int_{2/3}^{1}.$$

On a pour p_2:

$$A_1 = \int_{2/3}^{1} f(x)F\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\int_{2/3}^{1}\left(\frac{x}{2}+1\right)dx = \frac{17}{144}$$

$$A_2 = \int_{1/2}^{2/3} f(x)F\left(\frac{x}{2}\right)F\left(\frac{3x}{2}\right)dx = \frac{1}{8}\int_{1/2}^{2/3}\left(\frac{x}{2}+1\right)\left(\frac{3x}{2}+1\right)dx = \frac{349}{6912}.$$

Les termes $A_3, \cdots$ seront vus avec p_k.

c) Calcul de p_k, $k = 2, \ldots, n$.

$$p_k \;=\; \int_{-1}^{1} f(x)F(\frac{x}{k})\cdots F(\frac{(k-1)}{k}x)F(\frac{(k+1)}{k}x)\cdots F(\frac{nx}{k})dx$$

$$p_k^- \;=\; \int_{-k/n}^{0} f(x)F(0))^{n-1}dx \;=\; \frac{k}{n.2^n}.$$

Pour p_k^+, on décompose $\int_0^1$ en

$$\int_{k/k+1}^{1} + \int_{k/k+2}^{k/k+1} + \cdots + \int_{k/k+j}^{k/k+j-1} + \cdots + \int_{k/n}^{k/n-1} + \cdots + \int_{0}^{k/n}$$

et ces intégrales sont notées A_1, $A_2, \ldots, A_j, \ldots, A_{n-k}, A_{n-k+1}$.

On a, comme précédemment

$$\begin{aligned} A_1 &\le \frac{1}{2^k}(1-\frac{k}{k+1})(\frac{1}{k}+1)\cdots(\frac{k-1}{k}+1) \\ &= \frac{1}{2^k}\;\frac{(k+2)\cdots(2k-1)}{k^{k-1}} \\ &= \frac{(2k)!}{(k+1)!}\;\frac{1}{2^{k+1}k^k} \\ &\sim (\frac{2}{e})^k\;\frac{\sqrt{2}}{2}\;\frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant estimer A_j pour p_k, $j \ge 2$.

$$\begin{aligned} A_j &= \int_{k/k+j}^{k/k+j-1} \frac{1}{2}\frac{1}{2}(\frac{x}{k}+1)\cdots\frac{1}{2}(\frac{k-1}{k}x+1)\times\frac{1}{2}(\frac{k+1}{k}x+1)\cdots\frac{1}{2}(\frac{k+j-1}{k}x+1)dx \\ &\le \frac{1}{2^{k+j-1}}\,\frac{k}{(k+j)(k+j-1)}\,\frac{1}{2^{k+j-1}}\,\frac{(k+j)\cdots(2k+j-2)(2k+j)\cdots(2k+2j-2)}{(k+j-1)^{k+j-2}} \\ &\le \frac{k}{(k+j)(k+j-1)^{k+j}}\;\frac{1}{2^{k+j-1}}\;\frac{(2k+2j-2)!}{(k+j-1)!} \\ &\le \sqrt{2}\;\frac{k}{(k+j)(2k+j-1)}\;(\frac{2}{e})^{k+j-1} \end{aligned}$$

Le calcul de l'espérance de X donne :

$$\begin{aligned} EX &\le \frac{1}{4}+\frac{1}{144}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n.2^n}+\sum_{j\ge 3}\frac{\sqrt{2}}{j^2}\;(\frac{2}{e})^j \\ &+ \frac{17}{72}+\frac{349}{3456}+\sum_{k\ge 2}\frac{\sqrt{2}}{2}\;\frac{k}{k+1}\;(\frac{2}{e})^k \\ &+ \sum_{\substack{j\ge 2\\ k\ge 3}}\frac{\sqrt{2}\;k^2}{(k+j)(2k+j-1)}\;(\frac{2}{e})^{k+j-1}. \end{aligned}$$

Pour évaluer le dernier terme, noté A, on pose $m = k+j$; il devient

$$A \;=\; \sqrt{2}\sum_{m\ge 5}\frac{1}{m}\left(\sum_{k=3}^{m-2}\frac{k^2}{m+k-1}\right)(2/e)^{m-1}.$$

La somme $\sum_{m\ge 5}$ est décomposé en $\sum_{m=5}^{20}$ et $\sum_{21}^{\infty}$; la première est calculée numériquement ; dans la seconde on utilise l'équivalent $\sum_{k=1}^{m}\frac{k^2}{m+k} \sim (-\frac{1}{2}+\log 2)m$.

Au total, on obtient $EX \le 4$, comme annoncé.