

par Bernard Beauzamy  
P.-D.G., S.C.M., S.A

C'est avec plaisir que je répondrai à l'invitation formulée par M. Gérard Besson "J'aimerais beaucoup, pour la Gazette, avoir un texte qui décrit une application des maths ; j'aimerais bien en fait que ce soient des maths pures, que l'on voie le cheminement qui conduit de la théorie (même élémentaire) à la réalisation pratique. Ce serait une belle illustration de l'applicabilité des mathématiques, et pas uniquement des mathématiques dites appliquées. Je ne sais pas si cela est possible..."

Cela est possible, cela est même facile, et la théorie n'a rien d'élémentaire. Les mathématiques sont plus vivantes et plus directement utilisables que ne le croient les mathématiciens du monde académique, qui, depuis une trentaine d'années, se sont laissé enfermer dans une conception trop étroite et trop rigide de leur discipline.

Avant de répondre à la question de M. Besson, je vais décrire brièvement mon propre parcours. Je suis moi-même issu des mathématiques fondamentales: après une thèse de troisième cycle en EdP, j'ai fait une thèse d'Etat (ce qu'on nomme maintenant "habilitation") en analyse fonctionnelle. Je suis devenu professeur (à Lyon I) en 1979. Mes spécialités successives ont été la théorie des opérateurs (en dimension infinie) puis l'analyse complexe et la géométrie des polynômes.

Ma découverte des applications des mathématiques remonte à 1987, avec la création d'une Association Loi 1901, l'"Institut de Calcul Mathématique", constituée dans le but de gérer quelques contrats, destinés à financer des bourses de thèse et à acheter un peu de matériel. Je me suis alors aperçu, avec étonnement, que le monde réel fournissait des sujets de recherche beaucoup plus intéressants que ceux que les mathématiciens, au sein du monde académique, se proposent à eux-mêmes. Je me suis aperçu aussi, avec davantage d'étonnement, que j'étais capable, quoique issu des mathématiques les plus fondamentales, d'apporter une contribution à ces problèmes. En 95, l'ICM a donné naissance à une Société Anonyme, la Société de Calcul Mathématique, S.A., installée aujourd'hui au 111, Faubourg Saint Honoré, Paris 8ème. J'ai quitté mon emploi de professeur pour devenir PDG de la SCM.

Le fait qu'un mathématicien fondamentaliste puisse apporter directement une contribution à un problème réel va à l'encontre des doctrines généralement acceptées dans le milieu académique, et M. Besson a bien raison de poser la question. Je me souviens d'un groupe de travail, présidé par mon ami Michel Demazure, constitué précisément pour réfléchir à ce genre de choses, et qui avait conclu que la transition ne pouvait se réaliser qu'au travers de structures appropriées, liées aux mathématiques appliquées.

Le contresens est pire encore qu'on ne l'imagine. Pour la plupart des lecteurs, les mathématiques appliquées reposent avant tout sur l'analyse numérique, encore appelée calcul scientifique : vous avez un problème physique, régi par des équations dans un domaine ; vous discrétisez ces équations grâce à un maillage du domaine ; vous obtenez un système linéaire que vous résolvez. C'est ce qu'on enseigne aux étudiants, dans tous les troisièmes cycles de France.

La Société de Calcul Mathématique, S.A., n'a aucun contrat de ce genre. Non pas que nous les refuserions si on nous en proposait : certains de mes collaborateurs ont précisément reçu la formation que je décris plus haut. Mais tout simplement parce qu'on ne nous en propose pas. Et si on ne nous en propose pas, c'est

parce que le besoin social est infime, comme en témoignent les innombrables CV que je reçois : des jeunes ayant reçu une formation en mathématiques appliquées et qui ne trouvent pas de travail. Il y a donc une double méprise du monde académique : ignorer les débouchés là où il y en a ; en voir là où il n'y en a pas.

Répondons maintenant à la question de M. Besson, en décrivant en détail une étude que nous avons menée. Je mentionnerai ensuite plus succinctement d'autres domaines où s'exerce la compétence du mathématicien.

L'étude proposée concernait la poursuite automatique de cibles. Un avion, ou un hélicoptère, survole une région, et une caméra s'efforce de la suivre constamment, sans intervention humaine. Le contrat nous a été notifié par la Délégation Générale pour l'Armement, mais les besoins civils sont tout aussi importants (que l'on pense aux contrôleurs de la navigation aérienne ou au suivi de véhicules terrestres). J'ai découvert ces questions au travers de la thèse d'un ingénieur de la DGA, M. Christian Olivier.

Précisons un peu le dispositif. La caméra est un appareil opto-électronique. L'image reçue est constituée de petits carrés élémentaires appelés "pixels", qui peuvent être soit noirs soit blancs. La cible, selon sa taille, apparaît donc comme un ensemble de points noirs sur fond blanc (ou l'inverse, peu importe) ; il peut n'y avoir qu'un seul point noir si la cible est petite ou éloignée.

Bien sûr, le premier problème qui se pose est celui de l'*identification* de la cible : décider qu'on veut pister celle-là. Nous n'en parlerons pas ici. Le second problème est celui de l'appariement des cibles : si 35 cibles ont été détectées à l'instant  $t$  et 35 autres à l'instant  $t + 1$ , comment apparier les plots de l'instant  $t + 1$  à ceux de l'instant  $t$  ? C'est typiquement le problème du contrôle aérien, et nous n'en parlerons pas non plus. Pour nous, l'espace aérien est entièrement vierge, sauf un point, et il s'agit de suivre ce point dans ses déplacements. Je mentionnerai cependant que le problème de l'appariement a été abordé par l'un de mes étudiants, M. Thierry Beley, dans sa thèse soutenue en mai dernier, et cofinancée par Aerospatiale et la D.G.A. [3]. Ce document peut être obtenu auprès de la S.C.M.

Revenons à notre problème de suivi automatique, que nous appellerons simplement "pistage". Comment cela fonctionne-t-il ? Un ordinateur traite les signaux reçus par la caméra et dit par exemple "la cible se trouve au pixel  $x = 10$ ,  $y = 7$ " (convenons que le pixel central est 0,0). En fonction de cette information, un ordre est transmis à un moteur, qui agit sur l'orientation de la caméra pour faire dévier celle-ci de tant de radians vers la droite et de tant de radians vers le haut, si bien que la cible se retrouve au centre. C'est très simple : si l'ordinateur va assez vite, et si la cible se déplace lentement et régulièrement, on n'a aucune raison de la perdre.

Dans la réalité, la cible ne se déplace ni lentement ni régulièrement, et, s'il s'agit d'un contexte militaire, elle n'a aucune raison de se laisser pister. Ajoutons à ceci les erreurs de mesure, inhérentes au dispositif optique. Il y a donc une certaine probabilité que la cible soit perdue.

Concrètement, on représente ceci en disant que le mouvement de la cible comporte deux termes : un terme déterministe, pris linéaire par commodité et un terme aléatoire, pris gaussien par commodité. Le choix "linéaire" est justifié, au moins sur une courte période ; le choix "gaussien" est arbitraire, mais ce n'est pas très important : nous savons faire les calculs avec d'autres lois, issues de retours d'expérience.

Le mouvement de la cible est évidemment continu, mais (et ceci est très important) il est connu par une *loi discrète* (par opposition à continue). La caméra observe en permanence, mais elle est "vidée" en direction de l'ordinateur à des intervalles de temps fixes, et le traitement informatique prend lui même un certain temps. On dispose donc d'une suite d'observations, à des instants  $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$

Pour répondre à la préoccupation liée à l'irrégularité du mouvement, on introduit la notion de *modèle*. Après la première détection, on réalise une identification partielle de la cible (avion ? hélicoptère ? missile ?),

ce qui permet de “caler” approximativement certains paramètres dans le mouvement supposé de cette cible, et donc de disposer d’un premier *modèle* pour cette cible. Avec ce modèle, on réalise une première poursuite (grossière) et l’on affine le modèle, et la poursuite, au fur et à mesure des observations. Il peut arriver, bien sûr, que la cible soit perdue, ce qui peut indiquer que le modèle retenu (faute d’informations suffisantes) n’était pas le bon.

### 1. La modélisation du problème

On note  $x(t)$  la position du système-cible. Comme on l’a dit, on considère que son mouvement est la superposition de deux mouvements : le premier est déterministe, et le second est aléatoire. Cela revient à le représenter par une équation de la forme :

$$dx(t) = Ax(t) dt + B d\omega(t), \quad (1)$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices supposées connues. La partie  $Ax(t)dt$  est la partie déterministe du mouvement, et la partie  $Bd\omega(t)$  la partie aléatoire.

La détermination précise des matrices  $A$  et  $B$  dépend du type de cible, et donc du modèle choisi, comme expliqué plus haut.  $\omega$  est une variable aléatoire ; on prend généralement un mouvement Brownien vectoriel. Cela rend compte du fait que la trajectoire est nécessairement continue, mais peut être très irrégulière.

Lorsqu’une observation  $Y_t$  est prise par la caméra au temps  $t$ , cette observation elle-même n’est pas complètement déterministe à partir de  $x(t)$  ; elle est faite de deux parties :

$$Y(t) = Hx(t) + \nu(t), \quad (2)$$

où  $H$  est une matrice qui représente la partie déterministe de la mesure ( $H$  est supposée connue : elle dépend des appareils) et  $\nu(t)$  est une variable gaussienne centrée, qui rend compte des erreurs de mesure.

Lorsqu’une observation est prise au temps  $t_n$ , on cherche à l’utiliser au mieux, ainsi que toutes les précédentes, pour avoir la meilleure estimation possible de  $x(t)$ , position de la cible aux instants ultérieurs. Ce dont l’observateur dispose, ce sont les observations  $Y(t_1), \dots, Y(t_n)$  ; il cherche à les utiliser au mieux pour déterminer  $x(t)$ ,  $t > t_n$ . Comme la connaissance exacte de  $x(t)$  n’est pas possible, on cherche une connaissance moyenne. En langage probabiliste, en d’autres termes, on cherche à évaluer l’espérance conditionnelle

$$E(x(t) \mid Y(t_1), \dots, Y(t_n)), \quad (3)$$

pour  $t \geq t_n$ .

Cependant, traiter l’information reçue par la caméra prend un certain temps, et on ne peut pas commencer le traitement de la  $n + 1$ -ème observation avant d’avoir terminé celui de la  $n$ -ème.

Le temps de traitement augmente avec la taille de l’image analysée (nous verrons plus loin une formule précise) et aussi avec la résolution adoptée : plus le grain de l’image est fin, et plus le traitement prend de temps. Le temps de traitement augmente donc avec la variance sur la position de la cible. Plus cette variance est grande, et moins est précise notre connaissance sur la position de la cible. Donc, la zone l’on doit chercher la cible est plus grande, et traiter cette zone plus vaste prend plus de temps. Cette augmentation peut être rapide ou lente (cela dépend du type de traitement utilisé), mais, comme l’a montré C. Olivier [4], dès que le temps de traitement croît plus vite que le logarithme de la variance, toutes choses étant constantes par ailleurs, la poursuite ne peut être assurée.

Il est très difficile de concevoir un système dont le temps de calcul croîtrait moins vite que le logarithme de la variance ! Dans le cas d'une image 2D, par exemple, si la variance est multipliée par 2, la taille de l'image à traiter sera multipliée par 4, et le temps de calcul aussi : il sera proportionnel au carré de la variance.

En pratique, cela veut dire qu'il est nécessaire de pouvoir jouer sur d'autres paramètres, que nous introduisons maintenant :

- la taille de la fenêtre où se fait l'observation. En effet, il est licite de réduire le traitement à une sous-fenêtre de la fenêtre initiale. Plus cette sous-fenêtre sera petite, et plus court sera le temps de calcul correspondant. Mais on court le risque évident que la cible ne soit plus dans la sous-fenêtre. La taille de celle-ci est donc caractérisée par une probabilité  $p_n$  : probabilité que la cible se trouve dans la sous-fenêtre à l'instant de la  $n$ -ème mesure (et donc  $1 - p_n$  est la probabilité que la cible ne s'y trouve pas). La taille de la sous-fenêtre apparaît explicitement dans le temps de calcul et implicitement dans cette probabilité.

- La résolution qui est adoptée pour le traitement. Il est en effet licite d'agréger plusieurs pixels ensemble, par exemple par carrés de 4, de 9, etc, et de traiter chaque carré de manière indivisible. Le temps de calcul sera réduit d'autant, mais la précision obtenue quant à la position de la cible sera évidemment inférieure.

On se place ici dans le cas mono-dimensionnel ; dans le cas général la variance est remplacée par une matrice de covariances. L'équation fondamentale (1) devient

$$dx = \lambda x dt + d\omega, \tag{4}$$

où  $\lambda$  est un paramètre réel, supposé  $> 0$  (le cas  $\lambda \leq 0$  est bien connu et ne présente aucune difficulté). Soit  $\Omega^2$  le réel positif tel que  $E(d\omega^2) = \Omega^2 dt$  (nous verrons plus loin la signification concrète de ce paramètre).

L'équation d'observation s'écrit, après réductions et simplifications :

$$Y(t) = x(t) + \nu(t) \tag{5}$$

où  $\nu(t)$  est l'erreur d'observation, supposée gaussienne centrée.

La *variance* de cette erreur d'observation est réglable à volonté ; c'est ce que nous appellerons l'*imprécision* ; la *résolution*, notée  $r$ , est l'inverse  $1/\rho$  : plus cette résolution est élevée, et plus la précision de l'observation est grande.

Le temps de calcul, noté  $\tau$ , pour une fenêtre donnée, est une fonction croissante de la taille de l'image traitée et une fonction croissante de la résolution (plus le pixel élémentaire est gros, et moins il y aura de calculs à faire). La forme exacte de la fonction  $\tau(A, \rho)$  dépend évidemment des appareils ; nous allons maintenant voir des formes précises plus en détail.

## 2. Modèles quantitatifs pour le temps de calcul

Supposons que notre fenêtre de vision (centrée sur la position supposée de la cible) s'étende de  $-A$  à  $A$  ; elle est donc de largeur  $2A$ . Comme la cible a une loi connue (en l'occurrence gaussienne centrée de variance  $v$ ), la probabilité que la cible soit dans la fenêtre, qui est notre paramètre  $p$ , est donnée par la formule

$$p = \int_{-A}^A e^{-t^2/2v} \frac{dt}{\sqrt{2\pi v}}$$

Voyons maintenant le lien entre le nombre de pixels traités et l'imprécision. Si nous cherchons à détecter la cible dans un segment de taille  $x$ , l'imprécision est  $x$ . Avec nos notations précédentes, l'imprécision est  $\sqrt{\rho}$  ( $\rho$  représente une variance, donc  $\sqrt{\rho}$  est un écart-type, c'est à dire une longueur). Donc la taille du pixel élémentaire est  $\sqrt{\rho}$ , et le nombre de pixels dans le segment de taille  $2A$  est  $N = 2A/\sqrt{\rho}$ .

Le temps de calcul est une fonction croissante du nombre de pixels traités, par une formule du type

$$\tau = \tau_0 + c N^\alpha,$$

où  $\tau_0$ ,  $c$ ,  $\alpha$  sont des paramètres positifs, dépendant seulement des caractéristiques de l'appareil utilisé pour la poursuite (et, bien sûr, indépendantes de la cible elle-même).

L'exposant  $\alpha$  caractérise la performance de l'appareil lorsque  $N$  est grand, c'est à dire lorsque le nombre de pixels à traiter est important. Plus  $\alpha$  est grand, et moins l'appareil est performant, plus  $\alpha$  est petit, et mieux l'appareil se comporte en présence d'une forte charge de travail. Selon les indications qui nous ont été données, une estimation du type  $1 \leq \alpha \leq 2$  est réaliste, et convient à la plupart des configurations.

Reportant l'estimation de  $N$ , on obtient

$$\tau = \tau_0 + c \left( \frac{2A}{\sqrt{\rho}} \right)^\alpha, \quad (6)$$

formule qui donne la dépendance explicite du temps de calcul par rapport à la taille de l'image et à la résolution.

### 3. Les équations d'évolution de la variance

Les équations d'évolution de la variance s'écrivent (voir C. Olivier [4]) :

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= \frac{e^{2\lambda\tau_k} v_k \rho_k}{v_k + \rho_k} + \frac{\Omega^2}{2\lambda} (e^{2\lambda\tau_k} - 1) \quad \text{avec proba } p \\ v_{k+1} &= e^{2\lambda\tau_k} v_k + \frac{\Omega^2}{2\lambda} (e^{2\lambda\tau_k} - 1) \quad \text{avec proba } 1 - p \end{aligned} \quad (7)$$

La première équation correspond au cas où la cible a été trouvée dans la sous-fenêtre que l'on a choisie ; la seconde équation au cas où elle ne s'y trouve pas. Dans le premier cas, la variance diminue, dans le second elle augmente.

Les paramètres  $\Omega^2$ ,  $\lambda$ , rencontrés précédemment, ont la signification suivante : plus  $\Omega^2$  est grand et plus la cible est "stochastique" ; le cas  $\Omega = 0$  correspondrait à une cible complètement déterministe. A l'inverse, le paramètre  $\lambda$ , rencontré dans (4), rend compte de la partie déterministe du mouvement. Posons  $\omega = \Omega^2/2\lambda$  : plus  $\omega$  est petit, plus la cible est déterministe (prévisible), plus  $\omega$  est grand, et plus la cible est aléatoire (imprévisible). Ces paramètres,  $\Omega$  et  $\lambda$ , sont caractéristiques du modèle adopté, et doivent être "calés" : soit par des connaissances a priori du type de cible (avion, hélicoptère, etc), soit grâce à l'utilisation des observations précédentes.

### 4. Observabilité

L'*observabilité* de la cible caractérise évidemment le fait que la variance sur la position doit rester bornée, ou plus exactement doit, après un certain nombre d'observations initiales, rester cantonnée dans des limites acceptables : après  $k_0$  observations, on doit avoir, pour tout  $k$ ,  $v_k \leq M$ , où  $M$  est une constante aussi petite que possible. Mais cette variance est elle-même une variable aléatoire, et imposer *constamment* une inégalité du type  $v_k \leq M$  pour tout  $k \geq k_0$  est peu plausible : il est acceptable que la variance se dégrade de temps en temps, pourvu qu'elle revienne, aussi souvent que possible, dans des limites fixées. La définition prise par C. Olivier d'un processus R.T.O. ("Real Time Observability") est qu'il existe une valeur  $M$  telle que

$$E_{x_0} T_M < +\infty, \quad (8)$$

où  $T_M$  est le premier instant où la variance passe au-dessous de  $M$  et  $E_{x_0}$  est l'espérance, conditionnée par le fait que la valeur initiale du processus  $x(t)$  est  $x_0$ .

Concrètement, cela veut dire : il existe une valeur  $M$  telle que la variance repassera une infinité de fois au-dessous de cette valeur.

Sur un plan pratique, nous retiendrons ceci : cette définition de RTO est nécessaire ; elle n'est pas suffisante. Elle est nécessaire, car si un système n'y satisfait pas, cela veut dire que la variance sur la position se dégrade avec le temps, et il est inutile de chercher à l'observer. Elle n'est pas suffisante, du moins sous la forme (8) : il faut en outre avoir des informations quantitatives sur la valeur de  $M$  (et pouvoir la choisir la plus petite possible) et des informations, également quantitatives, sur le temps de retour dans la bande  $\{y \leq M\}$  : si ces temps sont trop lacunaires, trop rares, il y aura trop d'instantanés où la cible sera perdue. Pour faire comprendre ceci, imaginons un exemple numérique, où  $v_k \leq M$  ne se produit qu'aux instantanés  $k = 10, 20, 30 \dots$  : cela signifie qu'une seule observation sur 10 nous renseigne sur la position de la cible ; le reste du temps elle est perdue, ce qui n'est pas acceptable en pratique. Nous voulons donc obtenir des estimations quant au temps de retour dans la bande  $\{y \leq M\}$ .

Notons aussi que la seconde des équations (7) conduit *toujours* à une dégradation de la précision (la cible ayant été perdue) ; cette dégradation est d'autant plus grande que le temps écoulé a été plus long. La première équation ne conduit à une augmentation de la précision que si la résolution  $r_{k-1}$  est assez grande (et donc la précision est assez bonne), sans que le temps de calcul  $\tau_{k-1}$  en soit trop affecté ; c'est évident si l'on écrit (7a) sous la forme :

$$v_{k+1} = \frac{e^{2\lambda\tau_k}}{\frac{1}{v_k} + r_k} + \omega(e^{2\lambda\tau_k} - 1). \quad (9)$$

Nous avons donc fini la description du problème. Passons à la solution. J'ai sollicité l'aide de mon ami Don Burkholder, professeur l'Université d'Illinois à Urbana-Champaign, et spécialiste de la théorie des martingales. Il m'a mis en rapport avec l'un de ses étudiants en thèse, Robert Bauer, et nous avons travaillé ensemble sur ce problème. Dans un premier temps, les résultats obtenus reposaient sur des outils de théorie des martingales, mais je me suis aperçu qu'ils fournissaient des estimations numériques peu satisfaisantes : ils sont trop généraux. J'ai repris tous les calculs en y substituant des estimations reposant sur le théorème central limite, qui sont bien meilleures. Voici le type de résultat qu'on obtient :

Il existe un choix optimal, tant pour la taille de l'image que pour la résolution, et ce choix optimal permet de contrôler au mieux la variance  $v_k$  sur la position de la cible. Il obéit aux deux règles suivantes :

Première règle : La valeur optimale de la résolution est donnée par la formule

$$\rho = \frac{vAe^{-A^2/2v}}{p\sqrt{2\pi v} - Ae^{-A^2/2v}}.$$

Elle est indépendante à la fois du modèle de poursuite et du type d'appareil. Elle ne dépend que de la variance  $v$  sur la position de la cible et de la taille de l'image.

Seconde Règle (lorsque la variance est grande) :

- La taille optimale de l'image est proportionnelle à  $\sqrt{v}$ ,
- la résolution optimale est inversement proportionnelle à  $v$ .

Le résultat peut se résumer ainsi :

Si le calage des paramètres est effectué de manière optimale et si les appareils sont assez puissants, la poursuite sera effectuée de manière très satisfaisante. Plus précisément, il existe une valeur critique  $M$ , entièrement calculable à partir de la valeur des paramètres, pour laquelle on est assuré que la variance sur la position de la cible dépassera très rarement cette valeur. On sait mesurer la probabilité de ces dépassements ; la probabilité de chacun d'eux est faible et la probabilité qu'ils soient nombreux décroît exponentiellement avec le nombre d'occurrences.

Le lecteur intéressé par les démonstrations et les calculs peut consulter l'article de Bauer-Beauzamy-Olivier [2] pour une première version des résultats ; une version plus élaborée est soumise à publication (Bauer-Beauzamy [1]) ; on peut se procurer ce document auprès de la S.C.M.

Je mentionne ces publications parce qu'elles me dispensent de reprendre le détail des calculs, dans ma réponse à M. Besson. Mais j'en profite pour mentionner ce fait très important, ignoré du monde académique : *les publications ne sont pas l'objectif de la recherche*. Par leur contenu, leur langage, leur diffusion, les publications ne sont accessibles qu'à un très petit cercle d'initiés. Elles sont nécessaires, car elles permettent la circulation des idées et la critique, mais elle ne constituent pas une fin en soi. L'objectif de la recherche est l'acquisition de nouvelles connaissances, de nouvelles idées, de nouvelles techniques, *et la mise à disposition auprès de ceux qui peuvent en avoir besoin* : sur ce dernier point, les publications échouent totalement.

Finissons avec la poursuite de cibles. Tout le monde a été content. Bauer, qui a écrit deux articles (l'un constitue le premier chapitre de sa thèse à l'Université d'Illinois) et a reçu une rémunération ; Burkholder, qui a contribué à l'étude ; Olivier, qui a fait sa thèse et deux articles ; la DGA, qui a reçu une réponse précise à une question précise, et la S.C.M., qui a traité un contrat très intéressant.

Est-ce un cas unique de "success story" ? Nullement : tous les contrats que nous traitons sont de ce type. Ils concernent tous des mathématiques fondamentales, des questions sur lesquelles il faut créer de nouveaux outils conceptuels. La trajectographie revient souvent (y compris sous la forme de recherche opérationnelle, telle l'organisation de tournées ou le routage de communications), mais il y a bien d'autres sujets. Nous avons travaillé sur le problème du codage de l'information dans le système nerveux central, sur la détection des arythmies cardiaques ; nous travaillons avec EdF sur le contrôle non destructif : analyse de signaux fortement atténués. Mentionnons aussi, dans d'autres registres, la cartographie sous-marine et la conception de "rétines", calculateurs ultra-rapides pour le traitement de l'image. Nous avons un projet dans le domaine du GPS et l'ONERA vient de nous confier la direction d'une thèse à ce propos.

La S.C.M. édite chaque trimestre un bulletin d'informations, la "Lettre de la S.C.M." ; l'abonnement est gratuit et le lecteur intéressé pourra y trouver de nombreuses informations sur les programmes que nous traitons ; dans certains cas, nous recherchons des collaborations.

Comme on le voit, les sujets sont multiples, et toujours de nature fondamentale. Je ne crois pas que nous ayons eu, depuis 1987, un seul contrat où il suffise de "prendre sur étagères". Il y a toujours quelque chose de neuf à créer. En revanche, les sujets que mes collègues me présentaient comme prometteurs, lorsque j'étais universitaire, à savoir le calcul parallèle et la cryptographie, se sont révélés être des mythes.

La distinction que fait le monde académique entre recherche fondamentale et recherche appliquée n'existe pas. Livrer du lait au magasin d'en face requiert, si l'on cherche à modéliser le processus, des outils de nature fondamentale qui, la plupart du temps, n'existent pas encore, si bien que l'on procède de manière empirique. La distinction juste serait entre recherche gratuite (l'objet de la recherche n'est pas précisé) et recherche finalisée. La recherche finalisée peut et doit être fondamentale ; elle n'a pas de raison d'être à courte vue. On pourrait parfaitement, à l'heure actuelle, concevoir un programme de recherche sur 15 ans, destiné à améliorer les outils de commande optimale, à l'heure actuelle très insatisfaisants.

La France a une recherche scientifique assez équilibrée entre le secteur public et le secteur privé : 50 % pour chacun, sur l'ensemble des disciplines scientifiques. Mais cet équilibre va être profondément modifié dans les années qui viennent. La D.G.A., par exemple, souhaite sous-traiter sa recherche auprès des industriels (elle représentait à elle seule 50 % de la recherche publique). D'autres organismes para-publics : le CEA, le CNES, le CNET, EdF, sont en profonde mutation ; les privatisations les obligent à être plus réactifs aux besoins de la clientèle, ce qui est une bonne chose, mais un point de vue strictement financier conduit

souvent les gestionnaires à diminuer l'effort de recherche, et c'est une erreur. Il en va de même pour les grands groupes publics : Aerospatiale, Thomson, etc, qui sont privatisés peu à peu.

Cette évolution était prévisible, et la S.C.M. a été créée à cet effet. Nous avons l'ambition d'être, d'ici quelques années, la structure de référence en recherche mathématique, prise au sens le plus large. Si un industriel, ou un laboratoire public ou privé, a un besoin de type algorithmique, il doit venir nous trouver et, le lendemain matin, un devis est sur le bureau du responsable. Ce besoin peut être instantané (une formule pour la semaine prochaine) ou à très long terme (des outils pour dans dix ans), nous devons pouvoir y répondre.

Pour réaliser cette ambition, la S.C.M. a deux difficultés à surmonter :

– il faut que le responsable en question ait l'idée de venir nous trouver.

N'importe quelle entreprise est confrontée à ce problème. Il se résout par les moyens habituels : se faire connaître petit à petit, faire de la publicité, etc. C'est plus facile pour nous que pour les entreprises en situation de forte concurrence : on ne voit vraiment pas qui d'autre le responsable en question pourrait venir trouver.

– il faut que le responsable identifie que son besoin relève de l'algorithmie mathématique. C'est là que se situe la véritable difficulté, parce que très peu de gens ont l'idée de se dire que les mathématiques peuvent leur être utiles : ils en sont restés à de vagues souvenirs scolaires, en général désagréables. Au travers des journaux, ils ont quelquefois vent d'une certaine activité mathématique : des jeux, des théorèmes du genre Fermat, dont ils ne voient pas en quoi ils pourraient les concerner professionnellement.

Nous avons donc adopté une attitude définie par les besoins, et non par les outils. Nous essayons de comprendre les besoins et nous proposons des solutions. Comment ces solutions ont été obtenues ne concerne pas les donneurs d'ordre, et, en général, ne les intéresse pas. Je ne crois pas qu'il existe d'alternative à cette organisation.

Lorsque j'étais professeur d'Université, je souffrais beaucoup de ne pouvoir faire comprendre à mes interlocuteurs la nature de mon activité, qui n'était perçue qu'au travers de l'enseignement. La recherche mathématique, telle qu'elle s'exerce au sein du monde académique, a une mesure sociale nulle. Lors des débuts de l'ICM, j'avais rencontré M. Jean Hébrard, alors conseiller de M. Rocard pour l'éducation, et il m'avait dit : "les mathématiciens n'ont pas su créer leur statut".

A quoi cela tient-il ? Selon moi, à une volonté d'isolement corporatiste. Les occasions de découvrir le monde extérieur ne manquent pas. Toutes les Universités, le CNRS même, ont des filiales de valorisation : les mathématiciens n'en profitent jamais. Les organismes spécifiques aux mathématiques, tels l'IHES, pourraient aussi être utilisés à cette fin : l'IHES fonctionne avec l'argent public, et on pourrait imaginer que, par exemple, il noue des liens avec Aerospatiale et développe (comme nous le faisons) un programme de recherche sur le GPS.

Il semble y avoir un regain d'intérêt pour le monde extérieur, la question de M. Besson en témoigne, mais aussi les efforts faits en plusieurs endroits par les enseignants pour ouvrir des débouchés aux étudiants, notamment au travers de DESS. Ce sont des tentatives extrêmement difficiles : l'ignorance du monde académique quant aux débouchés réels, la rigidité des mentalités, l'inadéquation des fonctions, la situation générale de l'emploi, tout ceci représente de formidables obstacles à surmonter. Mais ces tentatives ont toute ma sympathie, et je ferai tout ce qui est en mon pouvoir pour les appuyer : conseils pour l'orientation des programmes, aide à la recherche de débouchés, accueil d'étudiants en stage, etc.

Bernard Beauzamy



## Références

- [1] Bauer, O. - Beauzamy, B. : Automated Target Tracking in real time : optimal adjustment of the parameters. *A paraître*.
- [2] Bauer, R. - Beauzamy, B. - Olivier, C. : Real time target tracking : optimal determination of the characteristics, using martingale tools. *J. Math. Anal. and Appl.*, 203, 1996, no 3, pp. 565–572.
- [3] Beley, T. : Estimation probabiliste pour des systèmes d’observateurs décentralisés ; application aux systèmes de trajectographie géographiquement répartis. *Thèse de doctorat ès Sciences*, Université de Lyon I, 15 mai 1998.
- [4] Olivier, C. : Real time observability of targets with constrained processing power. *IEEE Trans. Automatic Control*, 41, 1996, no 5, pp. 689–701.